Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
1. Klausur

8. Mai 2023

Zone A Nachmittag | **Zone B** Vormittag | **Zone C** Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

2223 – 7126

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

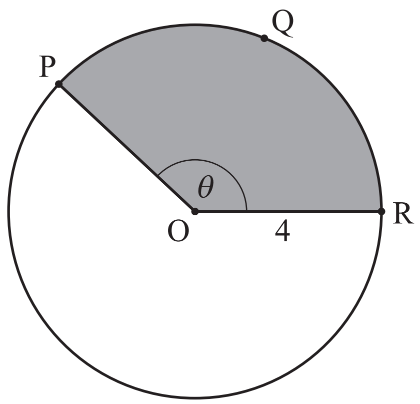
Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und Radius $4\,\mathrm{cm}$.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Die Punkte P, Q und R liegen auf der Kreislinie, und der Winkel $\mathrm{P\hat{O}R} = \theta$ (im Bogenmaß).

Die Länge des Kreisbogens PQR beträgt $10\,\mathrm{cm}$.

(a) Finden Sie den Umfang des schattierten Sektors. [2]

(b) Finden Sie θ. [2]

(c) Finden Sie den Flächeninhalt des schattierten Sektors. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Eine Funktion f ist definiert durch $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

(a) Der Graph von $y = f(x)$ hat eine vertikale und eine horizontale Asymptote.

Notieren Sie die folgenden Gleichungen:

(i) Die der vertikalen Asymptote.

(ii) Die der horizontalen Asymptote. [2]

(b) Finden Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Graph von $y = f(x)$

(i) die y-Achse schneidet;

(ii) die x-Achse schneidet. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

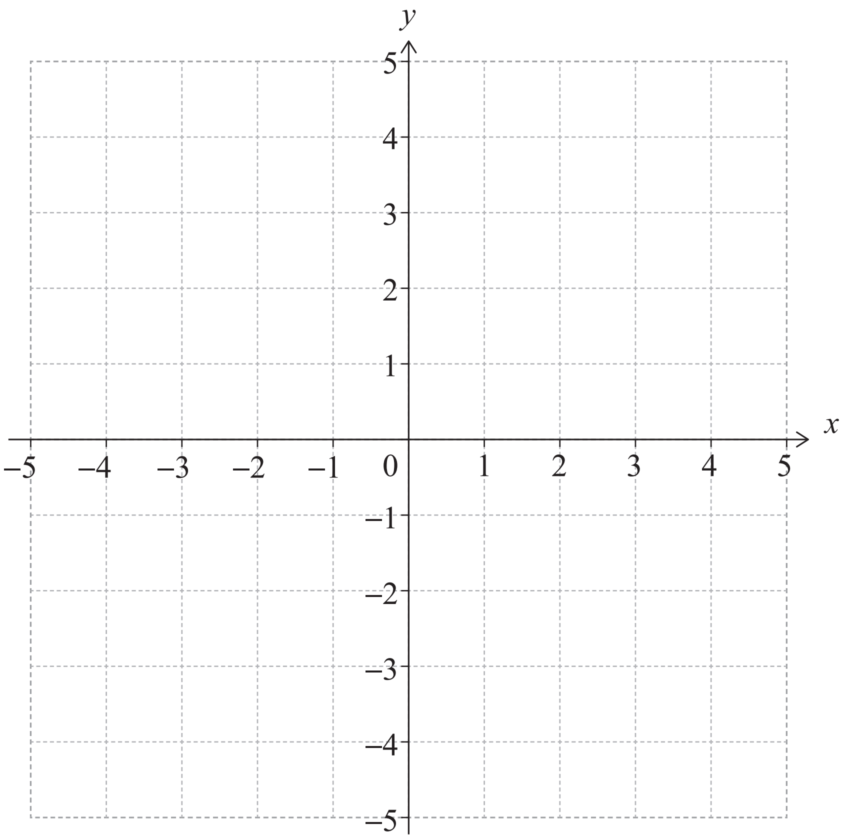
. . . .

. . . .

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

(c) Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem den Graphen von $y = f(x)$, der alle Merkmale aus den Teilen (a) und (b) zeigt. [1]



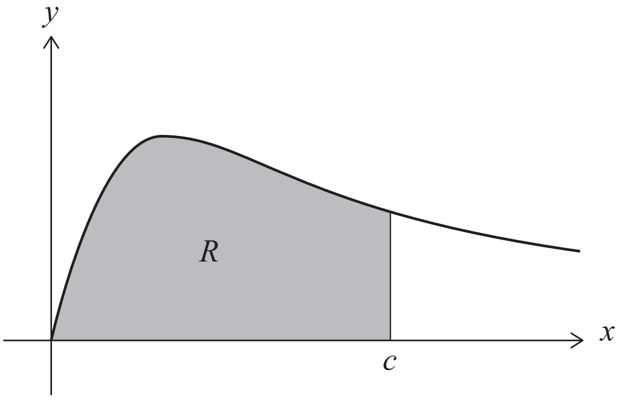
3. [Maximale Punktzahl: 5]

Für die Ereignisse A und B gelten: $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}25$ und $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}55$.

Finden Sie $\mathrm{P}(B)$.

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Teil des Graphen von $y = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ für $x \geq 0$.



Die schattierte Fläche R wird begrenzt durch die Kurve, die x-Achse und die Gerade $x = c$.

Der Flächeninhalt von R beträgt $\ln 3$.

Finden Sie den Wert von c.

5. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Funktionen f und g sind für $x \in \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:

$$f(x) = ax + b\text{, mit } a,\ b \in \mathbb{Z}$$

$$g(x) = x^2 + x + 3\,.$$

Finden Sie die beiden möglichen Funktionen f so, dass $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 14x + 15$.

6. [Maximale Punktzahl: 5]

Eine stetige Zufallsvariable X hat die folgendermaßen definierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & a \le x \le 3a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei a eine positive reelle Zahl ist.

(a) Geben Sie $\mathrm{E}(X)$ in Abhängigkeit von a an. [1]

(b) Finden Sie durch Integration $\mathrm{Var}(X)$ in Abhängigkeit von a. [4]

7. [Maximale Punktzahl: 7]

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

8. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Funktionen f und g sind folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = \tan x,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}.$$

Die Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ schneiden sich in einem Punkt P dessen x-Koordinate k ist, mit $0 < k < \frac{\pi}{2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\cos^2 k = \sin k$. [1]

(b) Zeigen Sie damit, dass die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ in P und die Tangente an die Kurve $y = g(x)$ in P sich im rechten Winkel schneiden. [3]

(c) Finden Sie den Wert von $\sin k$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ an, mit a, $c \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}^+$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

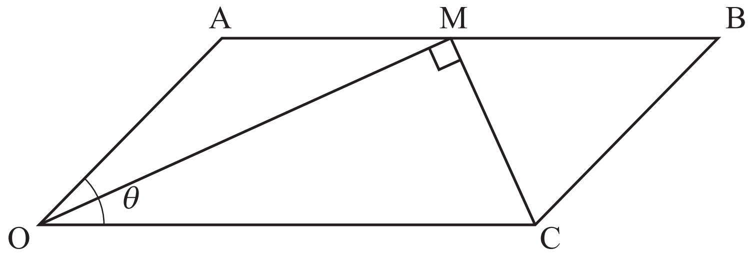
. . . .

. . . .

. . . .

9. [Maximale Punktzahl: 9]

Das folgende Diagramm zeigt das Parallelogramm OABC mit $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$ und $|\boldsymbol{c}| = 2|\boldsymbol{a}|$, mit $|\boldsymbol{a}| \neq 0$.



Der Winkel zwischen $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ist θ, mit $0 < \theta < \pi$.

Der Punkt M liegt auf $[\mathrm{AB}]$ so, dass $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, mit $0 \le k \le 1$ und $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 0$.

(a) Drücken Sie $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$ aus. [2]

(b) Zeigen Sie damit mit Hilfe der Vektor-Methode, dass $|\boldsymbol{a}|^2\,(1-2k)\big(2\cos\theta - (1-2k)\big) = 0$. [3]

(c) Finden Sie denjenigen Wertebereich für θ so, dass es zwei mögliche Positionen für M gibt. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

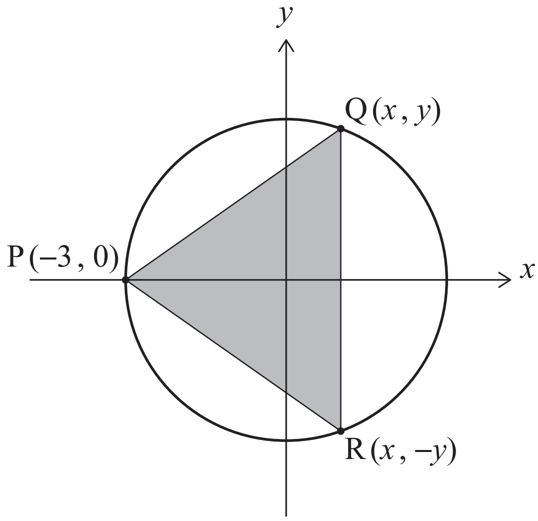
Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 14]

Ein Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 9$ hat den Mittelpunkt $(0, 0)$ und den Radius 3.

Diesem Kreis ist Dreieck PQR mit den Eckpunkten $\mathrm{P}(-3, 0)$, $\mathrm{Q}(x, y)$ und $\mathrm{R}(x, -y)$ einbeschrieben, wobei Q und R variable Punkte im ersten bzw. vierten Quadranten sind. Dies ist im folgenden Diagramm dargestellt.



(a) Zeigen Sie, dass für Punkt Q gilt: $y = \sqrt{9 - x^2}$. [1]

(b) Finden Sie damit einen Ausdruck für den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR, in Abhängigkeit von x. [3]

(c) Zeigen Sie, dass gilt: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \dfrac{9 - 3x - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$. [4]

(d) Finden Sie damit oder auf andere Weise die y-Koordinate von R so, dass A maximal wird. [6]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 22]

Betrachten Sie die komplexe Zahl $u = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(a) Finden Sie den Betrag und das Argument von u, und zeigen Sie damit, dass $u = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. [3]

(b) (i) Finden Sie die kleinste positive ganze Zahl n so, dass u^n eine reelle Zahl ist.

(ii) Finden Sie den Wert von u^n wenn n den in Teil (b)(i) gefundenen Wert annimmt. [5]

(c) Betrachten Sie nun die Gleichung $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$, mit $z \in \mathbb{C}$.

(i) u sei eine Lösung $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$. Finden Sie die anderen Lösungen.

(ii) Finden Sie mit Hilfe einer geeigneten Transformation von z nach w, oder auf andere Weise, die Lösungen der Gleichung $1 + 5w + 10w^2 + 12w^3 = 0$, mit $w \in \mathbb{C}$. [9]

(d) Betrachten Sie die Gleichung $z^2 = 2z^*$, mit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

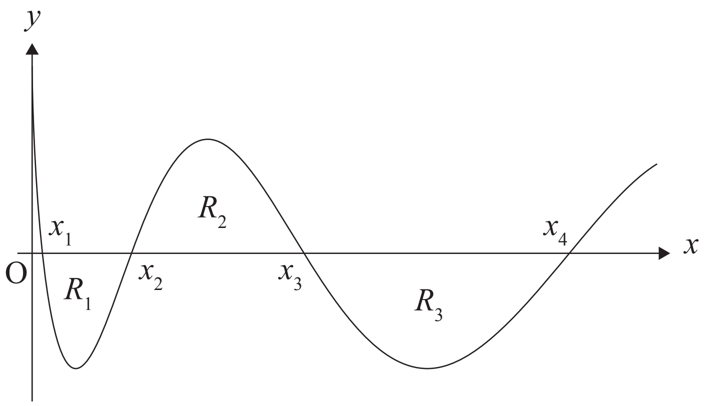
Finden Sie die Lösungen der Gleichung, indem Sie z in der Form $a + b\mathrm{i}$ schreiben. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 17]

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution, dass
$\int \cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ gilt. [6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Teil der Kurve $y = \cos\sqrt{x}$ für $x \geq 0$.



Die Kurve schneidet die x-Achse bei x_1, x_2, x_3, x_4, ….

Der n-te x-Achsenabschnitt der Kurve, x_n, ist gegeben durch $x_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$, mit $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Notieren Sie einen ähnlichen Ausdruck für x_{n+1}. [1]

Die durch die Kurve und die x-Achse begrenzten Flächen werden mit R_1, R_2, R_3, … bezeichnet, wie im obigen Diagramm dargestellt.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche R_n.

Geben Sie Ihre Antwort in der Form $kn\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}^+$. [7]

(d) Zeigen Sie damit, dass die Flächeninhalte der durch die Kurve und die x-Achse begrenzten Flächen R_1, R_2, R_3, … eine arithmetische Folge bilden. [3]

Quellenangaben:

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.